DEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNDEKİ İDEAL İŞLEMLERİ

Çağla ÖZATAR
18025033

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

- R bir halka ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için

i) $a + (-b) \in I$

ii) $ra \in I$

koşulları sağlanıyor ise I ya R nin bir ***sol ideali*** denir.

Değişmeli bir R halkasında her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ar = ra$ olduğundan sol ideal ile sağ ideal aynıdır. Bu durumda I ya R nin bir ***ideali*** denir.

- R birimli ve değişmeli bir halka ve $a \in R$ olsun. $A = \{ ra : r \in R \}$, R nin bir idealidir. Bu ideale R nin a ile üretilen ***temel (esas) ideali*** denir ve

$$aR = (a) = Ra \text{ ile gösterilir.}$$

Her ideali bir temel ideal olan halkaya ***temel ideal halkası*** denir.

- İdeal tanımı kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır:

1) R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ ise $A = \{ ra : r \in R \}$ kümesi, R de bir sol ideal olur.

2) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Eğer $a \in R$ ise $A = \{ ra : r \in R \}$ kümesi R de bir ideal olur.

3) A ve B, R nin iki ideali olsun. O halde $A + B$ de R nin bir idealidir.

4) A ve B, R nin iki ideali ise AB de R nin bir idealidir.

5) Eğer A ve B, R nin idealleri ise AB, A da ve B de kapsanır.

6) Eğer A ve B, R nin idealleri ise $(A{:}B)$ de R nin bir idealidir.
Burada $(A{:}B) = \{ c \in R : cB \subseteq A \}$ şeklinde tanımlıdır.

7) A, R nin bir ideali olsun. O halde $\sqrt{A}$ da R nin bir idealidir.
Burada $\sqrt{A} = \{ r \in R : bir\ n \in \mathbb{N}\ için\ r^n \in A \}$ şeklinde tanımlıdır.

8) Tam sayılar halkasının her ideali temel idealdir.

- R bir birimli, değişmeli halka ve A da R nin bir öz ideali ($A \neq R$) olsun. O halde $a, b \in R$ için $ab \in A$ alındığında $a \in A$ ya da $b \in A$ oluyorsa A ya R nin bir "***asal ideali***" denir.

- R bir birimli, değişmeli halka ve A da R nin bir ideali olsun. Eğer A, R ye eşit değil ve A ile R arasında kapsama bağıntısına göre herhangi bir ideal yoksa A ya "***maksimal ideal***" denir. (Örneğin A, R nin maksimal ideali ve $A \subseteq K \subseteq R$ ise $K = A$ ya da $K = R$ olmalıdır.)

- R bir birimli, değişmeli halka ve A, R nin bir ideali olsun. Eğer A aşağıdaki iki koşulu sağlarsa A ya R nin bir "***asalımsı ideali***" denir.

i) $A \subset R$

ii) $a, b \in R$ için $ab \in A$ ve $a \notin A$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in A$ (veya $b \in \sqrt{A}$)

- Q, R birimli, değişmeli halkasının bir asalımsı ideali olsun. O halde $P = \sqrt{Q}$, R nin bir asal idealidir. Bu durumda Q ya "***P – asalımsı ideal***" denir.

- Q ve P, R birimli, değişmeli halkasının idealleri olsun. Q nun P – asalımsı ideal olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) $Q \subset P$

ii) Eğer $b \in P$ ise $b^n \in Q$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır.

iii) Eğer $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ ise $b \in P$ dir.

KAYNAKÇA

[1] SHARP R.Y., STEP IN COMMUTATIVE ALGEBRA, 0-521-64623-5, 2.BASKI, CAMBRIDGE ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ, LONDRA, 2000

[2] YEŞİLOT G., ÖZAVŞAR M., SOYUT CEBİR, 978-605-133-300-7, 1.BASKI, AKADEMİK YAYINCILIK, ANKARA, 2012

[3] CHAN G., PROPERTIES OF EXTENDED AND CONTRACTED IDEALS, TEKSAS, 1966

[4] AĞARGÜN G. A., ERSOY B. A., ORAL K. H., ALAN M., AYGÖR N. K., SOYUT CEBİR, 978-975-511-622-8, BİRSEN YAYINEVİ, İSTANBUL, 2015

[5] https://tr.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether

[6] matematiksel.org

GENİŞLETİLMİŞ VE KISITLANMIŞ İDEALLER

- $f{:}R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. A, S nin bir ideali ise $f^{-1}(A) = \{ r \in R : f(r) \in A \}$ de R nin bir idealidir. Bu ideale " ***R nin kısıtlanışı***" denir ve $\boldsymbol{f^{-1}(A) = A^c}$ ile gösterilir.

- A, R nin bir ideali ise $f(A)$ nın S de ürettiği ideale $f(A)S$, "***A nın S ye genişlemesi*** " denir ve $\boldsymbol{f(A)S = A^e}$ ile gösterilir.

- Genişletilmiş ve kısıtlanmış ideal tanımı kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır:

1) $f{:}R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. A ve B, R nin idealleri ve I ve J, S nin idealleri olsun. O halde $A \subset B$ ise $A^e \subset B^e$ ve $I \subset J$ ise $I^c \subset J^c$ olur.

2) $f{:}R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. A, S nin bir ideali ve B, R nin bir ideali ise $(A^c)^e \subset A$ ve $B \subset (B^e)^c$ olur.

3) A, S nin ve B, R nin ideali olsun. O halde $A^{cec} = A^c$ ve $B^{ece} = B^e$ olur.

4) A, B S nin ve I, J de R nin idealleri olsun. O halde, $A^c + B^c \subset (A+B)^c$ ve $(I+J)^e = I^e + J^e$ olur.

5) f: R $\to$ S bir halka homomorfizması olsun. A, B S nin ve I, J de R nin idealleri olsun. O halde $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ ve $(I \cap J)^e \subset I^e \cap J^e$ olur.

6) A, B S nin ve I, J de R nin idealleri olsun. O halde, $A^c B^c \subset (AB)^c$ ve $(IJ)^e = I^e J^e$ olur.

7) A, B S nin idealleri ve I, J de R nin idealleri olsun. O halde, $(A{:}B)^c \subset (A^c{:}B^c)$ ve $(I{:}J)^e \subset (I^e{:}J^e)$ sağlanır.

8) A, S nin bir ideali ve I da R nin bir ideali olsun. O halde, $(\sqrt{A})^c = \sqrt{A^c}$ ve $(\sqrt{I})^e \subset \sqrt{I^e}$ sağlanır.

9) B, R nin bir ideali olsun. Eğer B kısıtlanmış bir ideal ise $(B^e)^c = B$ olur.

10) A, S nin bir ideali olsun. Eğer A genişletilmiş bir ideal ise $(A^c)^e = A$ olur.

- F bir cisim, D, F cisminde bulunan bir tamlık bölgesi ve M de D nin bir çarpımsal alt kümesi olsun. Burada $a \in$ D ve $m \in$ M olacak şekilde tüm a/m bölümlerini içeren küme F cisminin bir alt halkasıdır. Bu küme D_M ile gösterilir ve bu küme, D nin, M çarpımsal kapalı alt kümesine göre "***kesir halkası***" olarak adlandırılır.

- R bir değişmeli halka olsun. Eğer R halkası birimli ve aşağıdaki koşulları sağlıyor ise R ye bir "***Noetherian halka***" denir:

i) R nin ideallerinin her artan zinciri $A_{r_1} < A_{r_2} < \cdots$ sonludur.

ii) R deki ideallerin oluşturduğu her boştan farklı idealler kümesinin bir maksimal elemanı mevcuttur.

iii) R nin her A ideali sonlu üretilmiştir. Yani, $A = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$ olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ vardır.

EMMY NOETHER

Emmy Noether asıl adı ***Amalie Emmy Noether***; (23 Mart 1882 – 14 Nisan 1935), soyut cebir ve kuramsal fiziğe çığır açıcı katkılarıyla bilinen bir Alman matematikçidir. Pavel Alexandrov, Albert Einstein, Jean Dieudonné, Hermann Weyl, Norbert Wiener ve daha birçok kişi tarafından halkalar, cisimler ve cebirler üzerine çalışmalarıyla devrim yaratan, tarihin en önemli matematikçilerinden biri olarak nitelendirilmiştir. Einstein Noether'in ölümü üzerine New York Times'a yazdığı mektupta şöyle diyordu: ***"Fraulein Noether, yüksek eğitime kadınların da dahil olmaya başlamasından bu yana kendini göstermiş en önemli ve yaratıcı matematik dehasıdır."***
Emmy Noether hem teorik hem de uygulamalı matematiğe önemli katkılar sağlamıştır. En önemli başarısı Noether teoremi olarak kabul edilmektedir. Noether, her seferinde bir halkaya odaklanmak yerine, tanımlanması kolay halkaların tümünün ortak bir iç yapıyı paylaştığını gösterdi. Bu halkalara günümüzde ***Noether halkaları*** denir. Paylaştıkları yapı, onları inceleyen matematikçilere yol gösteren bir harita gibidir. Matematikçiler Noether'ın haritasını sadece halka teorisinde değil, sayı teorisi ve cebirsel geometri gibi diğer alanlarda da kullanır.